子空间，子空间的和.（并通常不能生成子空间）

W_1+W_2.

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim \underbrace{W_1\cap W_2}$$

基扩张成 W_1, W_2 基.

引入了外直和 $V\oplus W$.（$V\times W$, +, ·）

$V\oplus W$ 有子空间 $V'=\{(v,0)\mid v\in V\}\underset{\text{同构}}{\cong}V$

$T: W_1\oplus W_2 \longrightarrow W_1+W_2$, $\ker T\cong W_1\cap W_2$

$(w_1, w_2)\longmapsto w_1+w_2$

$W_1\cap W_2=\{0\}$ 时，T 是同构.

定理：W_1, W_2 是 V 的子空间，$W_1\cap W_2=\{0\}$

则 T 是同构，且 T 诱导 $W_1'\cong W_1$.

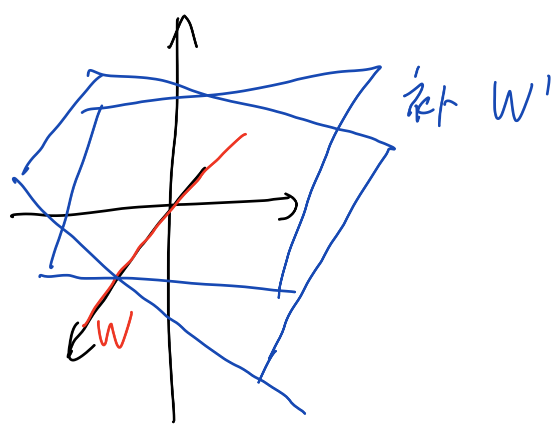
$W_2'\cong W_2$.

称 W_1+W_2 为内直和.（直和 $W_1\oplus W_2$）

如果 $W_1 \oplus W_2 = V$，称 W_2 是 W_1 的补空间。
(内)

性质：W 是 V 的子空间，W 的补空间存在

证明：取 W 的基，扩张……



考虑，$T: V \to W$。$\ker T$ 有补空间 $(\ker T)'$

T 满射，则有 $T\big|_{(\ker T)'} : (\ker T)' \xrightarrow{\sim} W$
同构。

$(\ker T)'$ 选择太多，"不太好"

为什么？（找不到"自然"的补）

"自然" 考虑 V, W 有 $T: V \to W$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \cup & & \cup \\ V_1 & \longrightarrow & W_1 \end{array}$$

假设 $V_1 \subset V$, $W_1 \subset W$ 子空间.

$$T(V_1) \subset W_1$$

理想的 picture T 分成两部分

$T_1: V_1 \to W_1$ 　　 V_2 是 V_1 的补

$T_2: V_2 \to W_2$. 　　 W_2 是 W_1 的补

$$T|_{V_1} = T_1, \quad T|_{V_2} = T_2$$

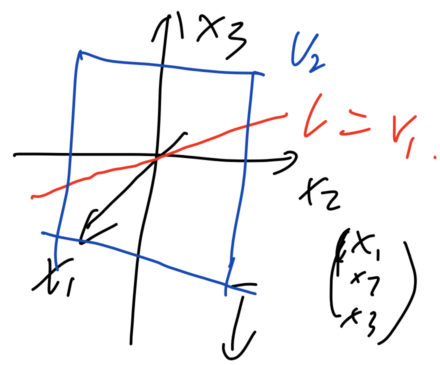
B_1, V_1 基 　　 C_1, W_1 基

B_2, V_2 基. 　　 C_2, W_2 基

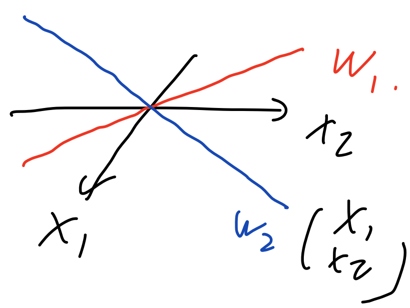
$$\left[\bar{T}\right]_{(B_1,B_2)}^{(C_1,C_2)} = \left[\begin{array}{c|c} [T]_{B_1}^{C_1} & 0 \\ \hline 0 & [T]_{B_2}^{C_2} \end{array}\right]$$

能作到.（可以，但是 W_2 选取依赖于 V_2）

例如： $V = \mathbb{R}^3$



$W = \mathbb{R}^2$



W 中 W_2 的选取依赖于 V 中 V_1 的补的选取.

Y vector space, $Y_1 \subset Y$.

$S : Y \to W$.

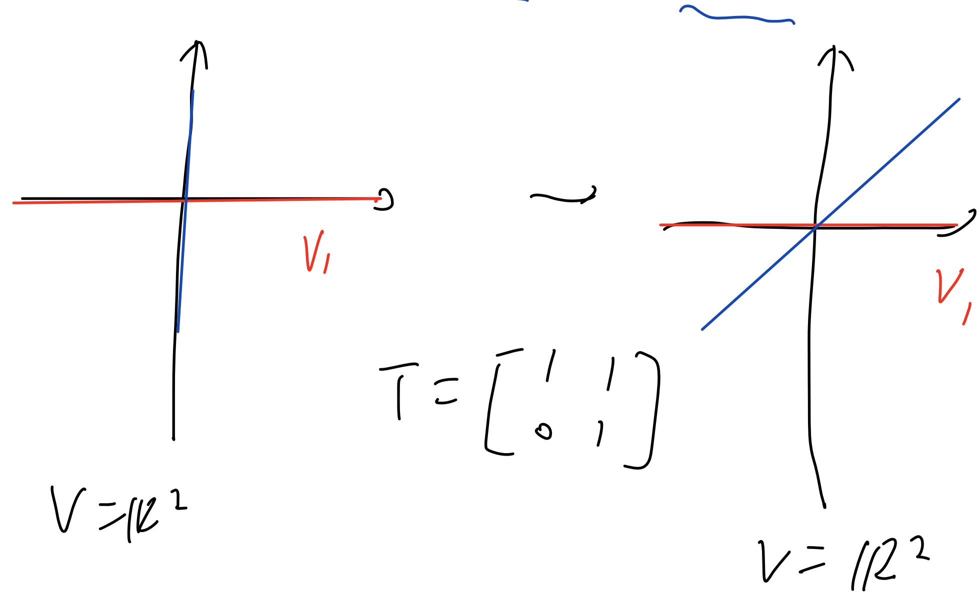
$S(V_1) \subset W_1$

“对就”不一致.

更需要 $\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V \\ \cup & & \cup \\ V_1 & \longrightarrow & V_1 \end{array}$.

能找到对 $(V_1)' \xrightarrow{T} (V_1)'$ 吗? (不一定)

例



$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

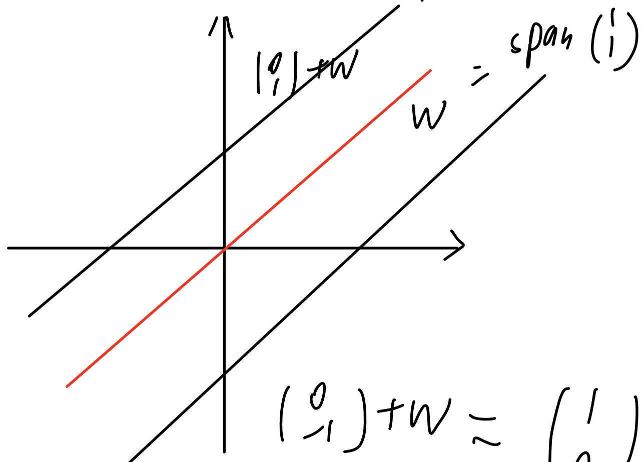
(没有基 β, $[T]_\beta^\beta$ 对角)

退而求其次, 定义商空间(“自然”)

定义: $W \subset V$ 子空间,

V/W 作为集合: 每一个元素是 V 的子集.

$v \in V$, $v + W = \{ v + w \mid w \in W \}$ 陪集



$\binom{0}{-1} + W = \binom{1}{0} + W$

一样的 $v_1 + W$, $v_2 + W$

$v_1 \neq v_2$.

$\boxed{v_1 + W = v_2 + W \text{ 当且仅当 } v_1 - v_2 \in W.}$

定义 V/W 上 $(+, \cdot)$

$$\begin{cases} (v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W \\ c(v + W) = cv + W \end{cases}$$

"well-defined" $v_1 + W = v_1' + W$ 时, 验证 $(v_1 + v_2) + W$

$V_1 \subset V$ $\qquad\qquad$ $=(V_1'+V_2)+W.$

性质：① $V \xrightarrow{\pi} V/V_1$ $\quad$ π 满，且 $\ker \pi = V_1$

$v \longmapsto v+V_1$

②
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/V_1 \arrow[ur, dashed, "T'"'] & \end{tikzcd}$$
, $\ker T \supset V_1$.

则存在唯一的 T' $(\exists! T')$

使得 $T = T' \circ \pi$

③
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & W \\ V_1 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "T"] & W_1 \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$
$\Rightarrow$ $\underline{V/V_1 \to W/W_1}$

之后：证明：$T: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$

存在 $V_{\mathbb{C}}$ 的基，$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ 是上三角阵

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. $\quad \exists P$ 可逆.

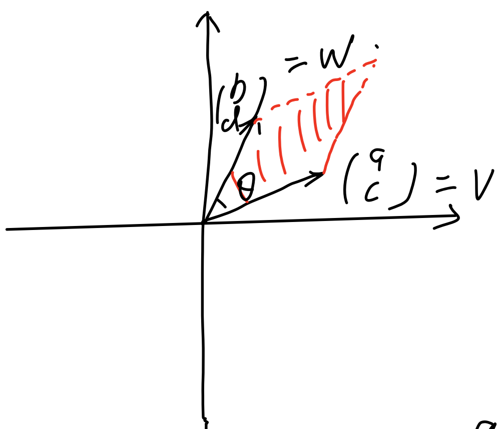
PAP^{-1} 上三角阵.

行列式：

2×2 矩阵是否可逆 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$c,d\neq 0$，$\frac{a}{c}\neq\frac{d}{d}$，$\boxed{ad-bc\neq 0}$，对 $c,d=0$ 也有效.

另一个几何含义：$|ad-bc|$ = 平行四形面积



为什么：$\cos\theta=\frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}}$

面积 $=\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$

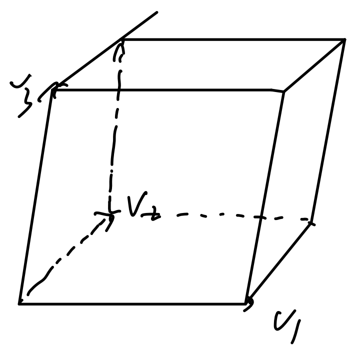
$=\sqrt{(ad-bc)^2} = |ad-bc|$

$ad-bc>0$，　w 在 v 左边，$0<\theta<\pi$

$ad-bc<0$，　w 在 v 右边，$0<\theta<\pi$.

ad−bc 是"有向"面积

高维推广. parallelepiped 体积



= 底面积 · 高.

(有向) 体积

$(v_1, v_2, v_3) \longmapsto$ 体积

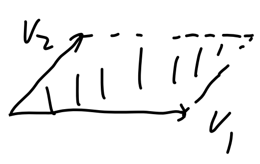
一种定义方式: $V = \mathbb{R}^n$ (线性结构)

定义一个函数 $f: \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n\text{个}} \to \mathbb{R}$

$(v_1, v_2, \cdots v_n) \longmapsto f(v_1, \cdots v_n)$

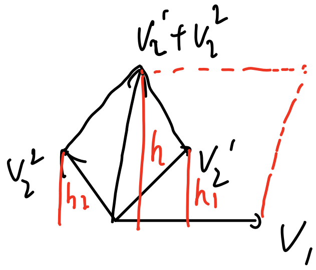
满足条件: ① $f(v_1, v_2, \cdots, cv_i, \cdots v_n)$

$= c\, f(v_1 \cdots v_n)$



② $f(v_1, v_2, \cdots v_i^1 + v_i^2, \cdots v_n)$

$= f(v_1, v_2 \cdots v_i^1, \cdots v_n) + f(v_1, v_2, \cdots v_i^2, \cdots v_n)$

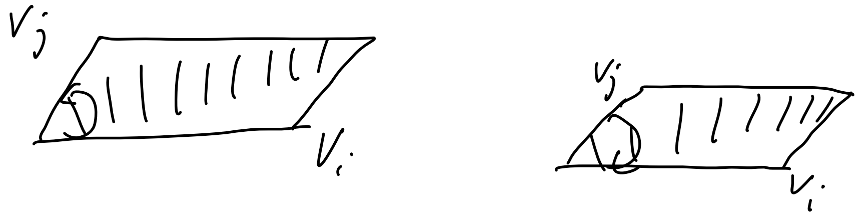


$\boxed{h = h_1 + h_2}$

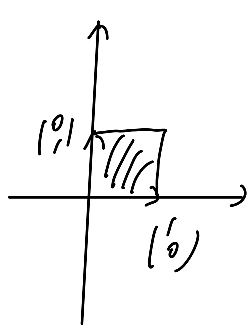
(图形拼凑)

③ $f(v_1, v_2, \cdots v_i, \cdots v_j, \cdots v_n)$

$= - f(v_1, v_2 \cdots v_j, \cdots v_i, \cdots v_n)$



④ (normalization) $f(e_1 \cdots e_n) = 1.$



①，②（多）线性． ③ 反对称．

定理（定义） f 存在且唯一． $[v_1 \cdots v_n] = A$．

$$f(v_1 \cdots v_n) \stackrel{\text{定义}}{=} |A| = \det A.$$

一些基本性质：

③′． $f(v_1 \cdots v_i \cdots v_j \cdots v_n) = 0$

如果 $v_i = v_j$．

③ ⇒ ③′． $f(v_1 \cdots v_n) = -f(v_1 \cdots v_n)$

$(v_i = v_j)$

$\Rightarrow f(v_1 \cdots v_n) = 0$ $(2 \neq 0)$．

③′ ⇒ ③

+②

$f(v_1 \cdots v_i + v_j, \cdots v_i + v_j, \cdots v_n) = 0$

$= f(v_1 \cdots v_i, \cdots v_i, \cdots v_n) = 0$

$+ f(v_1 \cdots v_j, \cdots v_j, \cdots v_n) = 0$

$+ f(v_1 \cdots v_i, \cdots v_j, \cdots v_n)$

$+ f(v_1 \cdots v_j, \cdots v_i, \cdots v_n)$

一些基本性质:

① 如果 A 某一列为0，则 $|A| = 0$

② $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

③ $\det A = \det A^T$

④ A 上三角阵 $\begin{bmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$，$|A| = a_1 a_2 \cdots a_n$

⑤ $\det A \neq 0 \iff \underbrace{A \text{ 可逆} \iff \operatorname{rk} A = n}$

⑥ A 准上三角阵 $\left[\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 .$$

证明: ① $f(v_1, \cdots, c\cdot 0, \cdots v_n) = \underline{c \cdot f(v_1 \cdots 0 \cdots v_n)}$

取 $c=0$，$\Rightarrow f(v_1, \cdots 0, \cdots v_n) = 0$.

② 对初等矩阵 E，计算 $\det E \neq 0$

$$\boxed{c \neq 0} \quad \left| \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \right| = c \cdot f(e_1 \cdots e_n) = c$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{matrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & c & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{matrix} \right| \\ \begin{matrix} \quad & \quad & i列 & j列 & & \end{matrix} \end{array}$$

$$= f(e_1, e_2 \cdots e_j + c e_i, \cdots e_n)$$

$$= f(e_1, e_2 \cdots e_j \cdots e_n) + c\, f(e_1, e_2 \cdots \underset{e_j}{e_i} \cdots e_n)$$

$$= 1$$

$$\left| \begin{matrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{matrix} \right| = (-1)$$

对 $|A \cdot \underset{E\,初等矩阵}{E}| = |A| \cdot |E|$ ← 由定义中的性质

一般有 $A = A_1 E_1 E_2 \cdots E_k$

$(A_1^T \text{ rref})$

$\begin{cases} \text{rk } A < n, & A_1 \text{ 有 0 列}. \quad |A| = 0 \\ \text{rk } A = n, & \text{则 } A_1 = I_n. \\ & |A| = |E_1| \cdots |E_k|. \end{cases}$

$\det(AB) = \begin{cases} B \text{ 可逆}, & A \cdot \underset{\text{初等}}{E_1} \cdots E_k \\ B \text{ 不可逆}, & \text{rk}(AB) < n \\ & (\text{rk}(AB) \leq \text{rk}(B)) \\ & |AB| = 0. \quad |B| = 0 \end{cases}$

③ $\det A = \det A^T$

$A = A_1 E_1 \cdots E_k$

$|A| = |A_1| \cdot |E_1| \cdots |E_k|.$

$rk(A_1) < n$, $rk(A) < n \Rightarrow |A| = 0 = |A^T|$
$rk(A^T) < n$

$A_1 = I_n$. $|A| = |E_1| \cdots |E_k|$

易验证. $\underbrace{|E_i^T| = |E_i|}$

$A^T = E_k^T \cdots E_1^T$

④ a_i 有 0，则 $rk(A) < n$ $|A| = 0$

a_i 无 0，用 $A = \underbrace{E_1 \cdots E_k}_{\text{第一种}} \underbrace{E_{k+1} \cdots E_l}_{\text{第二种}}$

$\Rightarrow |A| = a_1 \cdots a_n$.

⑤ ✓.

⑥ $\left[\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$ 和④同样.

计算技巧：①行变换（上三角阵）（普遍性）

②行展开（3.）　$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; v_1 \quad v_2 \cdots v_n$

$f(v_1, v_2 \cdots v_n)$

$= f(a_{11} \cdot e_1 + a_{21} \cdot e_2, \cdots + a_{n1} e_n, v_2, \cdots v_n)$

$= a_{11} f(e_1, v_2, \cdots v_n)$

$+ a_{21} f(e_2, v_2, \cdots v_n)$

$+ a_{i1} \boxed{f(e_i, \boxed{v_2, \cdots v_n})} + \cdots$

$\boxed{f(e_i, v_2', \cdots v_n')}$

$\boxed{v_2 = a_{i2} \cdot e_i + v_2'}$

v_2' 可作 $e_1 \cdots e_n$ 线性组合时只有出现 $e_1 \cdots \hat{e_i} \cdots e_n$

$$f(\underline{e_i}, \underline{v_2' \cdots v_n'})$$

$$v_2' \cdots v_n' \in \underline{\text{span}(e_1 e_2 \cdots \hat{e}_i, \cdots e_n)} = W$$

定义一个新的函数.

$$g: \underbrace{W \times W \cdots \times W}_{(n-1)个} \to \mathbb{R}$$

$$(w_1 \cdots w_{n-1}) \mapsto f(\underline{e_i}, \underline{w_1 \cdots w_{n-1}})$$

满足所有，除了

$$g(e_1 \cdot \hat{e}_i\, e_n) = f(e_i, e_1 \cdots e_n)$$

$$= \underline{(-1)^{i+1}} \cdot f(e_1 \cdots e_n)$$

$$= (-1)^{i+1} \cdot 1$$

$$\Rightarrow f(e_i, \underline{v_2' \cdots v_n'}) = (-1)^{i+1} \cdot \begin{vmatrix} & a_{12} & \\ & a_{22} & \\ & \cancel{a_{i2}} & \\ & a_{n2} & \end{vmatrix}$$

去掉i行

(3:1)

A_{ij} = A 去掉 i行, j列.

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11}\cdot|A_{11}| + (-1)^{1+2} a_{21}\cdot|A_{21}|$$

$$= \sum_i \left(a_{i1}\cdot|A_{i1}|\right)(-1)^{i+1}$$

一般: $|A| = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \underline{|A_{ij}|}$.

$$\begin{vmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & a_{in} \\ \\ \end{vmatrix}$$

存在性. (唯一性 ⇐ 行展开 + 归纳法)